



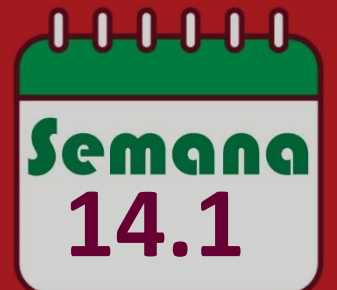
ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA Determinantes

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



LA FUNCIÓN DETERMINANTE

Definición:

La función determinante está definida $\det: R^{n \times n} \rightarrow R$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n)$
3. $\det(C_1, \dots, \alpha C_i, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n), \alpha \in R$
4. $\det(C_1, \dots, C, \dots, C, \dots, C_n) = 0$

Donde $A = (C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$ y C_i es la columna i – ésima de A .

Nota:

El determinante de una matriz A será denotado por $\det(A)$ o por $|A|$.

La definición de determinante se puede presentar con las columnas o las filas.

PROPIEDADES

Sea $A = (C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$, se cumple:

1. $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$
2. $\det(C_1, \dots, 0, \dots, C_n) = 0$
3. $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, \alpha C_i, \dots, C_n) = 0, \alpha \in R$
4. $\det(C_1, \dots, C_i, +\alpha C_j, \dots, C_j, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n), \alpha \in R.$
5. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \alpha \in R.$
6. $\det(A) = \det(A^T).$
7. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
8. $\det(A^m) = (\det(A))^m, m \in N.$
9. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}, A$ es una matriz inversible.
10. A es una matriz inversible si y solo si $\det(A) \neq 0.$

Nota:

A partir de la definición se pueden comprobar las siguientes fórmulas.

DETERMINANTE DE ORDEN 1

$$\det([a_{11}]) = a_{11}$$

DETERMINANTE DE ORDEN 2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Regla de Sarrus (solo para 3x3)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

EJEMPLOS

1. Si en una matriz cuadrada, se tiene una fila (o columna) de ceros el valor de su determinante es cero. (Propiedad 2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

2. Si en una matriz se tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el valor del determinante de esa matriz es cero. (Propiedad 3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si en una matriz se intercambian dos filas (o columnas), el valor de su determinante cambia de signo. (Propiedad 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

4. Si en la matriz en un determinante se intercambian un numero par de filas (o columnas), el valor del determinante no varia.(Propiedad 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix} = - \left(- \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

5. El determinante de una matriz no varia si una de sus filas (o columnas) de la matriz, se le suma cualquier otra fila (o columna) por una constante. (Propiedad 4)

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 10 & 6 & 5 & 6 \\ 0 + 8 & 3 & 4 & 7 \\ 1 + 16 & 2 & 8 & 8 \\ 4 + 8 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Si un determinante tiene una fila (o columna) la cual es la suma de dos filas (o columnas), su valor es la suma de los 2 determinantes que la suma determina. (Condición 1)

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 7 \\ 8 & 5 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2 & 6 & 9 & 7 \\ 4+4 & 5 & 4 & 6 \\ 8+1 & 6 & 5 & 7 \\ 2+6 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

7. El determinante de la matriz A de orden $n \times n$, coincide con el determinante de su transpuesta. (Propiedad 6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Si A y B son matrices del mismo orden $n \times n$, se cumple: $|AB| = |A||B|$.
(Propiedad 7)

$$\left| \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right| = 32(6) = 192$$

9. Si en un determinante se tiene una fila (o columna), multiplicada por una constante, el determinante quedara multiplicada por dicha constante. (Condición 3)

$$\begin{vmatrix} a & 3a & 4a & 5a \\ b & 3b & 5b & 6b \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

10. Para cualquier matriz A de orden n , se cumple: $|rA| = r^n |A|, r \in N$.
(Propiedad 5)

$$\left| r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 5 \end{bmatrix} \right| = r^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES ADICIONALES

1. El valor del determinante de una matriz A antisimétrica de orden impar, es cero.
2. Para cualquier matriz idempotente, su determinante es 0 o 1 .
3. El valor del determinante de una matriz nilpotente es cero.
4. El determinante de una matriz triangular (diagonal), es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Prueba:

$$1. |A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A| \rightarrow 2|A| = 0 \rightarrow |A| = 0$$

$$2. A^2 = A \rightarrow |A^2| = |A| \rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \rightarrow |A| = 0 \vee |A| = 1$$

$$3. |A^k| = |O_{n \times n}| \rightarrow |A|^k = 0 \rightarrow |A| = 0$$

DETERMINANTE DE VANDERMONDE

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i)$$

Ejemplo: Determine el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i) = (6-5)(6-4)(6-3)(5-4)(5-3)(4-3) = 12$$

MENORES DE UN ELEMENTO

El menor M_{ij} del elemento a_{ij} de la matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es el determinante de la matriz en la cual se ha omitido la fila i , y la columna j .

El determinante de un menor es un determinante de orden uno menos del orden del determinante $|A|$.

Ejemplo: Determine los menores M_{12} , M_{32} del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 14$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

COFACTOR DE UN ELEMENTO

El cofactor C_{ij} de un elemento a_{ij} de la matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ se define como: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Así definimos la matriz de los cofactores de A denotada $Cof(A) = [C_{ij}]_{n \times n}$ como la siguiente matriz: $Cof(A) = [C_{ij}]_{n \times n}$.

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, determinemos la matriz $Cof(A)$.

$$Cof(A) = [c_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} M_{11} & (-1)^{1+2} M_{12} & (-1)^{1+3} M_{13} \\ (-1)^{2+1} M_{21} & (-1)^{2+2} M_{22} & (-1)^{2+3} M_{23} \\ (-1)^{3+1} M_{31} & (-1)^{3+2} M_{32} & (-1)^{3+3} M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} -63 & 56 & -3 \\ 56 & -32 & 7 \\ -6 & 13 & -3 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN DE UN DETERMINANTE SEGÚN EL DESARROLLO DE LAPLACE

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ definimos el valor del determinante de la matriz como:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} C_{i_0 j} = a_{i_0 1} C_{i_0 1} + a_{i_0 2} C_{i_0 2} + a_{i_0 3} C_{i_0 3} + \dots + a_{i_0 n} C_{i_0 n}, 1 \leq i_0 \leq n$$

O también:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i j_0} C_{i j_0} = a_{1 j_0} C_{1 j_0} + a_{2 j_0} C_{2 j_0} + a_{3 j_0} C_{3 j_0} + \dots + a_{n j_0} C_{n j_0}, 1 \leq j_0 \leq n$$

Ejemplo: Determine el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Aplicando la operación elemental $f_1 \rightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4$

$$\begin{vmatrix} 18 & 18 & 18 & 18 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -3 & -4 \\ 6 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -504$$

Ejemplo: Determine el valor del siguiente determinante

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Respuesta: –609

Ejercicio:

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, donde

$$N = \{A = [a_{ij}]_{5 \times 5} / |A| < 0\}.$$

- I. $\exists B \in N / |B| = -1.$
- II. $\forall A, B \in N : |AB| > -1.$
- III. $\forall A, B \in N : AB \in N.$

Respuesta: **VVF**

MATRIZ SINGULAR Y NO SINGULAR

Definición:

Si una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ cumple que $|A| \neq 0$ se dice que es una matriz no singular. En caso $|A| = 0$ se dirá que es una matriz singular.

Ejercicio:

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, donde

$$N = \{A = [a_{ij}]_{5 \times 5} / |A| < 0\}.$$

- I. $B + C \in N \rightarrow B, C \in N.$
- II. $BC \in N \rightarrow B, C \in N.$
- III. $B^2 \in N \rightarrow B \in N.$
- IV. $B \in N \rightarrow B^T \in N.$

Respuesta: **FFVV**

Problema:

Sabiendo que $|A| = 3$, matriz cuadrada de orden 3, determine el valor de:

$$T = \frac{|4|A^{-T}|A^2|}{64|A^{-2}|}$$

Respuesta: 3

Problema:

Determine el orden de la matriz cuadrada A , si $|A^2|A| = |A|^6$.

Respuesta: 4

Ejercicio 1:

Si x e y son números reales y se tiene la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x - 1 & 3x & y + 2x & y + 1 \\ 2y & y + 1 & 2 - y & 1 \\ x + 2 & 0 & 1 & x + 3 \\ y - 1 & 1 & x + 2 & x + y \end{pmatrix}$$

entonces $|A|$ es igual a:

a) $x + y$

b) $x^2 + y + 4$

c) 0

d) $x^2 - y^2 + 2xy$

e) $x^3 + y^3$

Solución:

Se pide:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3x & y+2x & y+1 \\ 2y & y+1 & 2-y & 1 \\ x+2 & 0 & 1 & x+3 \\ y-1 & 1 & x+2 & x+y \end{vmatrix}$$

Efectuando $C_1 - C_2; C_4 - C_3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-2x & 3x & y+2x & 1-2x \\ y-1 & y+1 & 2-y & y-1 \\ x+2 & 0 & 1 & x+2 \\ y-2 & 1 & x+2 & y-2 \end{vmatrix}$$

son iguales

Nótese que $C_1 = C_4$

$$\therefore |A| = 0$$

Rpta.: c

Ejercicio 2:

Determinar el número de factores primos de

$$F(a, b, c) = \begin{vmatrix} a^3 & 1 & a \\ b^3 & 1 & b \\ c^3 & 1 & c \end{vmatrix}$$

- a) 2
- d) 5

- b) 3
- e) 6

- c) 4

Solución:

Efectuando $F_2 - F_1; F_3 - F_1$

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} a^3 & 1 & a \\ b^3 - a^3 & 0 & b - a \\ c^3 - a^3 & 0 & c - a \end{vmatrix}$$

Por el teorema de Jacobi:

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} a^3 & 1 & a \\ b^3 - a^3 & 0 & b - a \\ c^3 - a^3 & 0 & c - a \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} b^3 - a^3 & b - a \\ c^3 - a^3 & c - a \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} (b - a)(a^2 + ab + b^2) & (b - a) \\ (c - a)(a^2 + ac + c^2) & (c - a) \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = -(b - a)(c - a) \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & 1 \\ a^2 + ac + c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = -(b - a)(c - a)(a^2 + ab + b^2 - a^2 - ac - c^2)$$

$$F(a; b; c) = (a - b)(c - a)(ab + b^2 - ac - c^2)$$

$$F(a; b; c) = (a - b)(c - a)[b^2 - c^2 + ab - ac]$$

$$F(a; b; c) = (a - b)(c - a)[(b - c)(b + c) + a(b - c)]$$

$$F(a; b; c) = (a - b)(c - a)(b - c)(a + b + c)$$

$\Rightarrow$ N.º de factores primos = 4

Rpta.: c

Ejercicio 3:

Determinar el valor de μ si

$$\mu = \sqrt[3]{\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

- a) 0
- d) -3

- b) -1
- e) -4

- c) -2

Solución:

Sea:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_1 - 2F_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_3 - F_2$; $F_4 - 2F_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Propiedad.

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 19 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_3 - F_2$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 19 & 0 \end{vmatrix}$$

Propiedad.

$$|A| = 2(4) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 8(-8) = -64$$

Finalmente tenemos:

$$\mu = \sqrt[3]{-64}$$

$$\mu = -4$$

Rpta.: e

Ejercicio 4:

Dada la matriz cuadrada A , se denomina valores propios de la matriz A a los números x que satisfacen la ecuación $|A - xI| = 0$. Halle los valores propios de la matriz A , si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

De la ecuación $|A - xI| = 0$; con $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$\begin{vmatrix} 2-x & -2 & -2 \\ -1 & -x & -2 \\ -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

Por operaciones elementales

$$\begin{matrix} F_1 - F_2 \\ F_2 - F_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3-x & x-2 & 0 \\ 0 & 1-x & x-3 \\ -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$



$$\xrightarrow{C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 3 - x & 2x - 5 & 0 \\ 0 & 1 - x & x - 3 \\ -1 & 0 & 1 - x \end{vmatrix} = 0$$

Por la regla de la estrella

$$(3 - x)(x - 1)^2 - (x - 3)(2x - 5) = 0$$

$$\rightarrow (3 - x) \mid (x - 1)^2 - 2x - 5 \mid = 0$$

$$\rightarrow (3 - x)(x^2 - 4) = 0$$

De donde $x = 3 \vee x = 2 \vee x = -2$

Por lo tanto, los valores propios son 3; 2; -2.

Ejercicio 5:

Dada la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b + c \\ c + a \end{pmatrix}$$

calcule el valor de $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$.

Solución:

Escribimos la ecuación así:

$$\begin{pmatrix} ax_3 \\ bx_2 \\ cx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b + c \\ c + a \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices

$$ax_3 = a + b \Leftrightarrow a(x_3 - 1) = b \Leftrightarrow x_3 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$bx_2 = b + c \Leftrightarrow b(x_2 - 1) = c \Leftrightarrow x_2 - 1 = \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$cx_1 = c + a \Leftrightarrow c(x_1 - 1) = a \Leftrightarrow x_1 - 1 = \left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$